Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Análisis Matemático

Sucesiones

1. Calcula los límites de las sucesiones:

$$x_n = n^2\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n. \qquad x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$x_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n}. \qquad x_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n.$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}. \qquad x_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}.$$

$$x_n = n\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right). \qquad x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}.$$

$$x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right). \qquad x_n = \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}.$$

$$x_n = \left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}\right)\sqrt{n}. \qquad x_n = n\left(\sqrt[5]{\frac{3n+12}{3n+7}} - 1\right).$$

2. Calcula los límites de las sucesiones:

$$x_n = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3}{n^4} \qquad x_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} \qquad x_n = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$$

$$x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5}\right)^n \qquad x_n = \left(1 + \log\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n$$

$$x_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right) \qquad x_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

$$x_n = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{1/2} + \mathrm{e}^{1/3} + \cdots + \mathrm{e}^{1/n} - n}{\log n} \qquad x_n = n\,\frac{\operatorname{arc\,tg}(1/n) - \operatorname{sen}(1/n)}{1 - \cos(1/n)}$$

3. Sea I un intervalo y $f : I \to I$ una función verificando que f es estrictamente creciente en I y $f(I) \subset I$. Sea $a \in I$ y definamos una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que si $x_1 < x_2$ la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente y si $x_1 > x_2$ la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente.

4. Usa el resultado del ejercicio anterior para estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$a)$ $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{x_n+1}.$ $\qquad b)$ $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \dfrac{-x_n+1}{x_n-2}.$

$c)$ $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \dfrac{5x_n+7}{x_n+5}.$ $\qquad d)$ $x_1 = a > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+3} \quad (a \neq 3).$